一种加权剖分简单多边形为三角形和凸四边形子域的算法

王 博[1] 李笑牛[2] 李 华[1]
[1](大连理工大学工程力学系, 大连 116024)
[2](吉林大学南岭校区力学系, 长春 130025)

摘 要 针对计算几何与有限元网格自动剖分中多边形子域剖分问题,给出了一种适用于有限元网格子域单元(即大单元)剖分的标准,并提出了一种通过在可视点对之间引进适当的多边形剖分和根据子域单元的形状质量判定因子来引导剖分的算法.由于建立的权函数和凹角(凸角)本身有关,因此对同属于凹角(凸角)的权函数也可以加以权值上的区分.该算法通过分步进行剖分,即先将简单多边形剖分为凸多边形,然后再将凸多边形剖分为凸六边形和凸五边形,最后将凸六边形和凸五边形剖分为三角形和凸四边形,以得到满足要求的剖分结果.在以上的每个剖分过程中,都引进了权重来引导剖分,使得剖分结果更加优化、合理.

关键词 权函数 子域剖分 网格生成 简单多边形
中图法分类号: O302 TB115 TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2002)05-0486-05

A Weighting Algorithm for Decomposing a Simple Polygon into Set of Triangles and Convex Quadrilaterals

WANG Bo[1], LI Xiao-niu[2], LI Hua[1]
[1](*Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024)
[2](*Department of Mechanics, Jilin University, Changchun* 130025)

Abstract According to the basic problem of the sub-domains decomposition of simple polygon in the computational geometry and the finite element mesh generation of computational mechanics, an algorithm for decomposing a simple polygon into set of triangles and convex quadrilaterals is proposed in this paper in which rules of decomposition are developed. And these rules are propitious to the finite element mesh generation. The algorithm is guided by a weighting function for pairs of visible vertexes of the given polygon and the estimation factor of shape quality. The created weighting functions are related with the concave (convex) angles, so the function values are different for any two different concave (convex) angles. The algorithm is composed of three steps: (1) Decomposing the simple polygon into set of convex polygons step by step, (2) Decomposing the over-six convex polygons into set of under-six ones (include six ones), (3). Decomposing the six and five convex polygons into set of triangles and convex quadrilaterals.

Keywords Weighting function, Sub-domains decomposition, Mesh generation, Simple polygon

0 引 言

在计算几何学和计算力学的有限元网格剖分中,简单多边形的子域剖分是一类基本的问题.在有限元网格剖分中,由于子域的剖分通常都是手工进行的,效率较低,而映射法又要求必须先将对象进行子域剖分,这是人们常常将映射法归为半自动化方

基金项目:国家自然科学基金(19802005);吉林省科委项目(19980538-01);辽宁省科学技术基金项目(9910200201)
收稿日期:2000-12-13;改回日期:2001-06-14

法的主要原因, 因此, 一方面人们希望避开子域剖分过程, 于是出现了以"Delaunay 三角化方法"、"推进网阵法"和"四分叉树法"为代表的全自动剖分策略[1~3], 但是, 由于网格控制、结果单元的形状质量以及对不同材料区域的适应性等问题, 故这些方法都有其不同的局限性; 另一方面, 由于映射法的灵活性、实用性, 大多数商业化软件仍使用它, 于是, 子域剖分的自动化成为摆在人们面前的一个现实问题, 而且对简单多边形的自动子域剖分是其中一个十分基本的问题, 同样, 这个问题也是计算几何中的重要内容; 不同的是, 在这两个领域中, 各自有不同的剖分准则. 文献[4]基于计算几何学的剖分准则, 给出了一个加权剖分简单多边形为凸多边形的算法.

另外, 当把计算几何中的子域剖分算法用来进行计算力学中有限元网格子域剖分时, 现有的子域剖分算法会有一些不适应, 即会产生一些畸变的子域单元和狭长的子域单元, 而这些形状的子域单元在有限元网格子域剖分中是应该避免的, 并且人们总希望剖分的结果是容易处理的凸多边形(如三角形、凸四边形等).

结合这些要求, 本文在文献[4]的基础上, 给出了一个适用于有限元网格剖分的子域剖分算法, 从而解决了将简单多边形加权剖分成容易处理的三角形和凸四边形集合的问题, 还通过引入子域单元形状质量的判断因子, 使剖分后得到的子域单元很好地满足了剖分要求.

为了更清晰地描述算法, 下面给出几个本文将涉及到的概念.

(1) 凸(凹)顶点　若多边形的顶点序列 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 按逆时针方向排列, 并且点 P_{i+1} 在直线 $P_{i-1}P_i$ 的左(右)侧, 则称点 P_i 为凸(凹)顶点.

(2) 可视点对　如果简单多边形中两个顶点间的连线全部落在多边形内部, 则称这两个顶点彼此可视.

(3) 凸多边形直径　当给定平面凸多边形的顶点序列 $P_1, P_2, \cdots, P_n$, 则该凸多边形的直径即为 n 个顶点中最远的点对长度.

1　算法描述

1.1　基本思想

该算法过程分为如下 3 步:

(1) 先为可视点对建立了一种有利于有限元网格子域剖分的权函数, 然后根据权值大小引导剖分, 将简单多边形剖分成为一组凸多边形集合;

(2) 针对每个多于 6 边的凸多边形, 通过引入剖分标准将其剖分至若干个少于 6 边的凸多边形(包括凸六边形)的集合;

(3) 通过引入三角形和凸四边形的子域单元形状质量判定因子将凸六边形和凸五边形剖分为三角形子域单元和凸四边形子域单元的集合, 以达到剖分目的.

1.2　权函数构造及剖分简单多边形为凸多边形

在不加入辅助点的情况下, 剖分简单多边形为凸多边形要逐次加入剖分线来消除凹点. 文献[5]指出, 如果加入的一条剖分线连接两个凹点, 这两个凹点又转化为分属两个子多边形, 并且在每个子多边形中都表现为凸点, 则这时所作的剖分是最佳剖分. 剖分最理想的情形是每次都作最佳剖分, 即每一次都能唯一地找到构成最佳剖分的剖分线, 但实际上最佳剖分有时是不存在的, 有时又会同时出现多个. 虽然文献[4]通过在可视点对之间建立权函数来引导剖分是十分有效的方法, 但是当待选点同属凹点时, 它不能针对待选点加以权值上的区分. 例如待选点所对应的内角分别为 200°和 240°, 当剖分线选取各自的角分线时, 则权值大小都是 $2W_{\max}$($W_{\max}$ 是给定的值)[4]. 显然, 在两者中应该更倾向剖分角. 本文结合有限元网格子域剖分的目标, 在文献[4]基础上, 重新给出权函数定义, 并记凹点的权函数为 $f(\theta)$, 凸点的权函数为 $g(\theta)$. 这里首先由图 1 和图 2 对权函数应具有的性质[4]分析如下:

设 P_i 是简单多边形中一个待消除的凹点, 过 P_i 前后的两条边是 $P_{i-1}P_i$ 和 P_iP_{i+1}, 两条边所在的直线将平面划分为标记为 0~3 的 4 个区域(图 1).

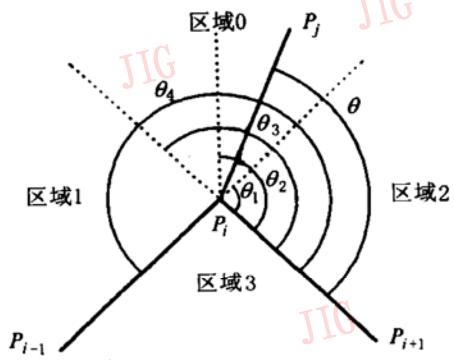

图 1　在凹点 P_i 处的权值 w_{P_i} 用函数 $f(\theta)$ 计算的示意图

由图 1 易见, 在点 P_i 处, 如果要得到最佳剖分, 那么应加入的从 P_i 出发的剖分线必须落在区域 0

中. 本文所建立的权函数应使剖分线落在区域 0 两射线(即 P_iP_{i-1}和 P_iP_{i+1}的反向延长线)所夹角的平分线上, 以使权函数取得最大值, 并向两侧都逐渐减小, 当其落到区域 0 的两射线边上减小到一半, 而落到边 $P_{i-1}P_i$ 或 P_iP_{i+1}上时, 应减小为 0; 然后, 以此思想建立权函数, 并记该权函数为 $f(\theta)$, 其中, θ 是该剖分线与边 P_iP_{i+1}所夹的角.

$$f(\theta)=\begin{cases}\theta_4\cdot\dfrac{\theta}{\theta_1} & 0<\theta\leq\theta_1\\ \theta_4\cdot\left(1+\dfrac{\theta-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right) & \theta_1\leq\theta<\theta_2\\ \theta_4\cdot\left(2-\dfrac{\theta-\theta_2}{\theta_3-\theta_2}\right) & \theta_2\leq\theta<\theta_3\\ \theta_4\cdot\left(1-\dfrac{\theta-\theta_3}{\theta_4-\theta_3}\right) & \theta_3\leq\theta<\theta_4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

在最佳剖分不存在时, 或者为了使获得剖分有更好的形态质量, 需要在一个凹点和一个凸点间引入剖分线, 为此, 应该对在凸点处发出的剖分线, 也能计算一个权值, 图 2 是点 P_i 为简单多边形中一个凸点的情况. 根据与凹点相同的思想, 可以建立凸点的权函数, 记为 $g(\theta)$.

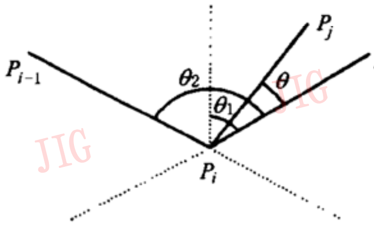

图 2 在凸点 P_i 处的权值 w_{P_i}用函数 $g(\theta)$ 计算的示意图

$$g(\theta)=\begin{cases}2^{\left|\frac{\theta_2}{\pi/3}\right|-1}\cdot\theta_2\cdot\dfrac{\theta}{\theta_1} & 0<\theta<\theta_1\\ 2^{\left|\frac{\theta_2}{\pi/3}\right|-1}\cdot\theta_2\cdot\left(1-\dfrac{\theta-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right) & \theta_1\leq\theta<\theta_2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

在 $g(\theta)$ 中, 引进系数 $2^{\left|\frac{\theta_2}{\pi/3}\right|-1}$的作用是为了加大不同角度之间的权重差别.

这样, 对简单多边形中任意一个顶点 P_i, 就可以计算 P_i 处的权值 w_{P_i}

$$w_{P_i}=\begin{cases}f(\theta) & P_i\ \text{是凹点}\\ g(\theta) & P_i\ \text{是凸点}\end{cases}$$

设 P_i 和 P_j 是简单多边形中任意一组可视点对, 定义 P_i 和 P_j 间剖分线对应的权值 $w_{P_iP_j}$为

$$w_{P_iP_j}=w_{P_i}+w_{P_j} \tag{1}$$

然后就可以按权值 $w_{P_iP_j}$ 由大到小的顺序引导剖分.

另外, 对于一个凸子域单元, 人们总希望其内角应尽量在 30°~ 150°范围内, 即为了避免图 3 中的子域单元出现. 对于图 3, 在计算几何中, 定义为凸五边形, 而在有限元网格子域剖分中, p 为五边形的一个蜕化点, 因为这种情况应该避免, 所以在算法实现中, 将 p 点定义为凹点, 就可以避免出现畸变的凸多边形.

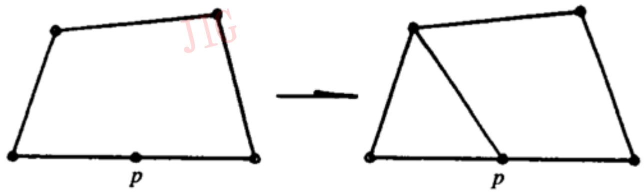

图 3 一个畸变子域单元划分成两个非畸变的凸子域单元

剖分的具体算法如下:

算法 1

步骤 1 检查并标记简单多边形中的凹顶点, 若有, 则进行步骤 2, 没有, 则结束算法 1;

步骤 2 确定简单多边形中至少有一个凹点的所有的可视点对;

步骤 3 将所得的每组可视点对按式(1) 给出的权函数公式计算权值;

步骤 4 找出权值最大的一组可视点对, 若其权值不为零, 则连接对应的两个顶点, 同时记录该剖分线, 并将该权值刷新为零, 进入步骤 5; 若最大权值为零, 则输出剖分后得到的子多边形集合, 结束算法 1;

步骤 5 对连入剖分线后所涉及到的可视点对的权值重新计算, 返回步骤 4.

1.3 剖分多边凸多边形为少边凸多边形

如果将剖分后得到的若干个凸多边形一次性地分解为三角形子域单元与凸四边形子域单元的集合, 并且要求子域单元的形状质量最好, 则算法将会十分复杂、耗时巨大, 所以本文采取了先将多边凸多边形(多于 6 边) 分解为少边凸多边形, 然后再剖分为三角形子域单元与凸四边形子域单元的集合的策略.

通过引入剖分线将多于 6 边的凸多边形剖分成形态较好的少于 6 边的凸多边形, 可以引进如下两条剖分标准(如图 4 所示).

(1) 引入剖分线后所形成的内角 θ_1, θ_2, θ_3, θ_4中, 最小角偏于最大;

(2) 引入的剖分线要在所有可能的剖分线中最短.

由于同时满足上述两个条件的剖分线不一定存

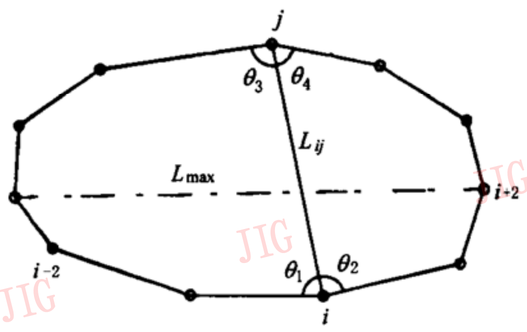

图 4　剖分标准示意图

在, 所以, 需分别对两条标准各引入一个比较合适的权值, 以构造一个统一的标准.

对于每一条可能的剖分线, 设其两个端点号为 i,j, 则可以取到

$$\theta_{ij} = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} \text{ 和 } L_{ij} = \| P_i - P_j \|$$

令 $S = \dfrac{\theta_{ij}}{\pi/2}$, $T = \dfrac{L_{\max} - L_{ij}}{L_{\max}}$, 可以看出: $S, T \in [0, 1)$. 其中, $L_{\max}$ 是待剖分凸多边形的直径. 这里先引入两个控制参数 c_s 与 c_t, 以构造该剖分线的权函数

$$w_{ij} = c_s \times S + c_t \times T \tag{2}$$

然后可以通过找出待剖分的多边凸多边形中, 使该权函数最大的两个端点来引入剖分线. 具体算法如下:

算法 2

由算法 1 得到经过剖分的子多边形集合之后, 进行以下处理, 即可将多边凸多边形剖分为少边凸多边形.

步骤 1　寻找子多边形集合中多于 6 边的凸多边形. 如果没有, 则算法结束; 否则, 对该多边形按式(2) 所得到的 i,j 进行剖分线生成, 以得到两个子多边形, 并输出剖分线;

步骤 2　将其中一个子多边形存到子多边形集合中, 并代替原来的多于 6 边的凸多边形, 另一个子多边形则补充到子多边形集合中;

步骤 3　返回步骤 1.

通过本文处理的实例来看, 建议两个控制参数取值为: $c_s = 1.0$, $c_t = 0.55$, 这样就可以得到比较满意的结果.

1.4　剖分少边凸多边形为三角形和凸四边形

通过上述剖分得到的剖分结果全部是少于或等于 6 边的凸多边形. 然后就可以分别针对凸五边形和凸六边形, 将它们剖分为形状质量较好的容易处理的三角形与凸四边形的集合, 其他子域单元不变, 即可达到剖分的目的.

关于三角形和四边形子域单元的形状质量, Lo 于 1994 年给出了一种界定[6]. 设三角形和四边形子域单元的形状质量判定因子分别为 α 因子和 β 因子, 这两个因子的取值范围都是[0, 1] .

在文献[6] 中提到, 当 $\alpha \geq 0.87$, $\beta \geq 0.54$, 则称三角形或四边形子域单元是较好的子域单元; 当 $\alpha \geq 0.95$, $\beta \geq 0.72$, 则称三角形或四边形子域单元是很好的子域单元. 由此不难看出, 这种因子的给出是侧重于三角剖分的, 由于本文想得到的是三角形和四边形子域单元共存的剖分集合, 所以引入一个平均质量的定义

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \sqrt[4]{\beta_j}}{m + n} \tag{3}$$

其中, m, n 分别是剖分凸五边形或凸六边形得到的三角形子域单元和凸四边形子域单元的数目, 可由它的大小来判断剖分结果的好坏. 由于在形状质量相同情况下, β 因子小于 α 因子, 因此在本文中取原判定因子的四次方根代入公式计算(如式(3) 所示) . 这样的定义, 不仅十分的简洁, 而且通过所处理的示例来看, 也是非常有效的.

算法 3

对于由算法 2 得到的子多边形集合, 进行如下的处理:

步骤 1　搜寻子多边形集合, 如没有多于 4 边的凸多边形, 则算法结束; 否则, 进行步骤 2;

步骤 2　若是凸五边形, 则做式(3) 所涉及的计算, 以找到最佳的剖分, 并输出剖分线, 转步骤 3; 否则, 进行步骤 4;

步骤 3　将生成的子多边形中的一个替代原来的凸五边形写入到子多边形集合中, 其余的子多边形续写到子多边形集合中, 返回步骤 1;

步骤 4　若是凸六边形, 则做式(3) 所涉及的计算, 找到最佳的剖分, 并输出剖分线;

步骤 5　用生成的子多边形中的一个来替代原来的凸六边形, 并写入到子多边形集合中, 其余的子多边形续写到子多边形集合中, 返回步骤 1.

2　算例分析与小结

下面给出一个利用本文算法和文献[4] 中的算法对同一多边形进行处理的示例. 图 5 是利用文献[4] 给出的算法进行剖分的结果(只剖分为凸多边形) . 由图 5 可以看见, 剖分结果中有几个蜕化点的

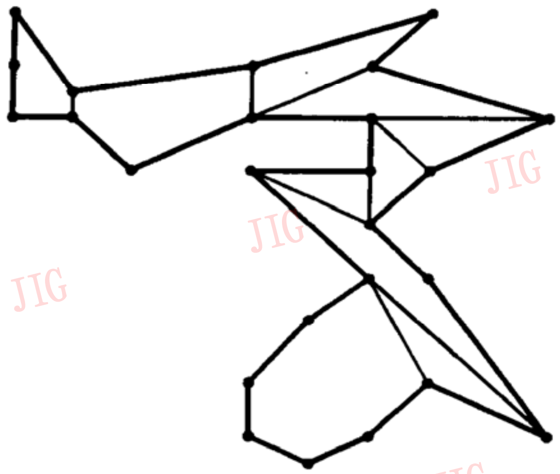

图 5　利用文献[4]给出的算法得到的剖分结果

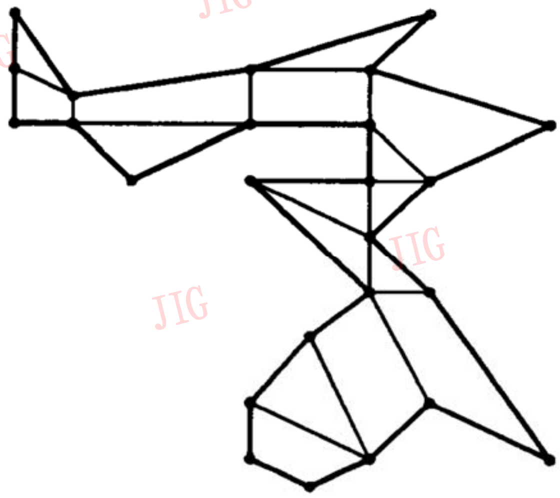

图 6　利用本文算法得到的剖分结果

存在, 而利用本文方法得到的结果中(见图 6), 由于消除了畸变子域单元的存在, 同时也避免了狭长子域单元的出现, 其得到的三角形子域单元和凸四边形子域单元的形状质量也较好, 从而满足了有限元网格子域剖分的要求.

本文给出了一种采用加权方法将简单多边形剖分为三角形与凸四边形子域单元的算法. 该算法适用于有限元网格剖分领域中的子域剖分问题. 用该算法, 剖分后获得的子域单元的形态质量也较好地满足了有限元网格子域剖分的要求, 该算法不仅具有概念清晰简单、使用灵活方便等特点, 而且运行效率令人满意, 因而对于有限元网格剖分的子域剖分问题, 它有很强的实用性.

参 考 文 献

1　胡恩球, 张新访, 向文等. 有限元网格生成方法综述[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1997, 9(4): 378~ 383.

2　丁永祥. 任意多边形的 Delaunay 三角剖分[J]. 计算机学报, 1994, 17(4): 270~ 275.

3　杨名生, 张立. 基于四叉树的有限元网格自动剖分[J]. 大连理工大学学报, 1997, 37(5): 614~ 617.

4　王钲旋, 李文辉, 庞云阶. 一个加权剖分简单多边形为凸多边形的算法[J]. 计算机学报, 1998, 21(3): 229~ 233.

5　肖忠辉, 卢振荣, 张谦. 简单多边形凸单元剖分的编码算法[J]. 计算机学报, 1996, 19(6): 477~ 481.

6　Lo S H, Lee C K. Generation of gradation meshes by the background grid technique[J]. Computers & Structures, 1994, 50(1): 21~ 32.

王　博　1978 年生, 现为大连理工大学工程力学系硕士研究生. 主要研究领域为计算力学有限元前置处理中有限元网格自动生成、计算生物力学等.

李笑牛　1963 年生, 副教授, 1999 年获吉林大学博士学位, 现在大连理工大学工程力学系博士后流动站工作. 主要研究方向为计算机图形学、有限元前置处理等.

李　华　1966 年生, 1996 年获大连理工大学博士学位, 现为大连理工大学计算机系副教授. 主要研究方向为计算机图形处理、图形可视化、有限元前置处理等.